СОДЕРЖАНИЕ И ТЕХНОЛОГИИ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБРАЗОВАНИЯ В ВУЗЕ

УДК 517.52.2

ПРОСТОЙ ВЫВОД РАЗЛОЖЕНИЯ $(1+x)^\alpha$ В РЯД ТЕЙЛОРА

О. В. Бесов

Московский физико-технический институт (Государственный университет), Россия, 141700, Московская обл., г. Долгопрудный, Институтский пер., 9; тел.: (095) 1351150; e-mail: besob@mi.ras.ru

Предлагается новый простой вариант вывода формулы разложения функции $(1+x)^\alpha$ в ряд Тейлора, использующий интегральную форму остаточного члена ряда.

Ключевые слова: ряд Тейлора, интегральная форма остаточного члена.

Приведем новый вариант вывода формулы разложения функции $(1+x)^\alpha$ в ряд Тейлора. Пусть $\alpha \notin N_0$, $0 < |x| < 1$. Остаточный член формулы Тейлора в интегральной форме имеет вид

$$r_n(x) = \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n)}{n!} \int\limits_0^x (x-t)^n (1+t)^{\alpha-n-1}\, dt.$$

Отсюда

$$\frac{|r_{n+1}(x)|}{|r_n(x)|} = \frac{|\alpha-n-1|}{n+1} \cdot \frac{\left| \int\limits_0^x |x-t|^n (1+t)^{\alpha-n-1} \dfrac{|x-t|}{1+t}\, dt \right|}{\left| \int\limits_0^x |x-t|^n (1+t)^{\alpha-n-1}\, dt \right|}.$$

Заметим, что

$$\frac{|x-t|}{1+t} \leqslant \frac{|x|-|t|}{1-|t|} = |x|\,\frac{1-\frac{|t|}{|x|}}{1-|t|} \leqslant |x|.$$

Следовательно, при фиксированном x и достаточно малом $\varepsilon > 0$

$$\frac{|r_{n+1}(x)|}{|r_n(x)|} \leqslant \frac{|n+1-\alpha|}{n+1}\,|x| \leqslant (1+\varepsilon)|x| = q < 1 \quad \text{при} \quad \forall n \geqslant n_\varepsilon.$$

Это означает, что $|r_n(x)| \to 0$ при $n \to \infty$ не медленнее, чем по геометрической прогрессии. Следовательно,

$$(1+x)^\alpha = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}\, x^n.$$

SIMPLE DEVELOPMENT OF EXPANSION $(1+x)^\alpha$ INTO TAYLOR SERIES

O. V. Besov

The author proposes a new simple development of the function expansion formula $(1+x)^\alpha$ into Taylor series, using the integrated form of the residual member.

Keywords: Taylor series, integrated form of the residual member.